**שאלה 1**

חלק א

* צ"ל האם לכל טבעי קיימים קבועים כל שלכל : . טבעי ולכן . לכן לדוגמא אם נבחר נקבל לכל טבעי. לכן מקרה זה מתקיים.
* צ"ל האם לכל טבעי קיימים קבועים כל שלכל : . מקרה זה אינו נכון. לדוגמא עבור נבחר ואז לכל נבחר ואז יתקיים:

*\*כי הרי , כלומר .*

* צ"ל האם לכל טבעי קיימים קבועים כל שלכל : . מקרה זה אינו מתקיים. לדוגמא עבור , ניקח ואז לכל ולכל נבחר

כך שיתקיים:

כי הרי:

חלק ב

תחילה נבין שההגדרה של היא מקרה פרטי של בו . לכן אם אז בפרט .

* לא נכון. לדוגמא ו-. ברור ש- כי אבל גם ברור ש- כי לכל ולכל ניקח ואז:

לכן גם בפרט כי זה מתקיים לכל .

* נתון וגם , לכן קיימים ו- כך שלכל מתקיים:

נבחר ואז נקבל:

לכן הוכחנו ש- כי מצאנו ו- שעבורם זה נכון.

* אגף שמאל זה סכום סדרה הנדסית עם . מהנוסחה לסכום סדרה הנדסית מתקיים:

לכל ולכל נבחר ואז יתקיים:

*כי הרי:*

*לכן מקרה זה אינו מתקיים.*

חלק ג

* נתון . לכן קיימים כך שלכל מתקיים:

לדוגמא עבור ו- נבחר ואז לכל יתקיים:

כלומר הנתון מתקיים, אבל (ראינו זאת בתרגול מספר 1). לכן הטענה אינה נכונה.

* נכון. נתון לכן קיימים כך שלכל מתקיים:

וגם קיימים כל שלכל מתקיים:

ומכאן לכל יתקיים:

נבחר .

הפונקציה הלוגוריתמית מונוטונית עולה, לכן נוכל לכתוב שלכל :

נבחר ואז:

*לכן הוכחנו ש:*

*כלומר*

* *נכון. נתון ולכן קיימים כך שלכל מתקיים:*

*בנוסף נתון ולכן קיימים כך שלכל מתקיים:*

*נבחר ו- ואז לכל יתקיים:*

*נרשום:*

*ולכן הוכחנו ש- וזה מה שצריך להוכיח.*

***שאלה 2***

*נתבונן**ב-. באופן כללי* עבור מתקיים ש- ולכן:

*כי הרי . עבור כל שהוא כפולה שלמה של 2 יתקיים ש- ולכן הפונקציה הזו מתאפסת אינסוף פעמים כי קיימים אינסוף כפולות שלמות של 2. לכן עבור ולכל יתקיים:*

*כלומר . לעומת זאת, לכל ולכל קיים עבורו:*

*כפי שציינו קודם, ולכן .* ***נמספר את להיות הפונקציה הראשונה בסדרה.***

*כעת נתבונן ב- . כלומר מתכנס ל- ולכן לכל*

*, ובפרט עבור , קיים כל שלכל :*

*ראינו ש- לכל ולכן אם נבחר אז לכל נקבל:*

*כלומר .*

***נמספר אותה להיות הפונקציה להיות הפונקציה ה-2 בסדרה.***

*נתבונן ב- (עבור ):*

*ברור ש- ולכן לכל ובפרט עבור קיים כך שלכל יתקיים:*

*נבחר ו- ואז לכל יתקיים:*

*כלומר ,* ***ולכן נמספר את הפונקציה להיות ה-3 בסדרה האסימפטוטית.***

*נתבונן**ב-:*

*עבור מתקיים:*

*נבחר ו- ואז לכל יתקיים:*

***ולכן נמקם את הפונקציה להיות ה-4 בסדרה האסימפטוטית כי .***

*נתבונן ב-:*

*נבחר ו- ואז לכל יתקיים:*

*כלומר הוכחנו ש- ו****לכן נמקם את להיות ה-5 בסדרה.***

*ננתח את :*

*נתבונן ב-:*

*\*אם אז המעבר יהיה נכון כי כאשר יהפוך ל-, קיזזנו את המעבר הזה על ידי מכפלה ב- ולכן הקטנו את הביטוי הכולל.*

*לכן עבור ועבור יתקיים שלכל :*

***לכן נמקם את להיות ה-6 בסדרה כי הוכחנו ש- .***

*נתבונן ב-. נציב :*

*בנוסף הראינו קודם ש:*

*נציב :*

*נשתמש במבחן השורש:*

*\*המכנה שואף ל-8 (למדנו זאת באינפי 1מ' ששורש של מספר עבור נותן שהשורש שואף ל-1). בנוסף המונה שואף ל"אינסוף", ולכן "אינסוף" חלקי מספר סופי שואף ל"אינסוף".*

*כלומר:*

*לכן על פי מבחן השורש, המנה מתבדרת לאינסוף, ולכן לכל ובפרט עבור קיים כך שלכל יתקיים:*

*כלומר ולכן עבור ולכל יתקיים:*

*ובכך הוכחנו ש-.*

***לכן נמקם את להיות ה-7 בסדרה.***

*נמשיך בניתוח, הפעם עם :*

*נשתמש שוב במבחן השורש:*

*זאת כי ידוע מאינפי שכל פולינום "מנצח" לוגוריתם. כלומר ולכן על פי מבחן השורש נקבל ש-*

*כלומר לכל ובפרט עבור קיים כל שלכל :*

*נבחר ואז לכל נקבל:*

*כלומר ולכן* ***נמקם את להיות ה-8 בסדרה.***

*ננתח את :*

*כלומר לפי סטירלינג, לכל ובפרט עבור קיים כך שלכל :*

*מתקיים:*

*נשתמש במבחן השורש עם :*

*קיבלנו ולכן על פי מבחן השורש יתקיים:*

*כלומר לכל ובפרט עבור קיים כך שלכל יתקיים:*

*נבחר ואז לכל יתקיים:*

*לכן:*

*ובכך הוכחנו ש-.* ***נמקם את להיות ה-9 בסדרה.***

*ננתח את :*

*כאמור לכל ובפרט עבור קיים כך שלכל יתקיים:*

*נבחר ואז לכל :*

*\*נובע מהבחירה של .*

בזאת הוכחנו ש- **ולכן נמקם את להיות ה-10 בסדרה.**

ננתח את :

עבור ועבור יתקיים שלכל :

בנוסף עבור ועבור יתקיים שלכל :

*כי הרי עבור מתקיים:*

כלומר . **נמקם את להיות ה-11 בסדרה.**

מצד שני:

כלומר:

לכן עבור ועבור (4 הוא המינימלי שעבורו הפיתוח של הסכום למעלה והאי שוויון יהיו נכונים) יתקיים שלכל :

*כלומר .* ***לכן נמקם את להיות ה-12 בסדרה.***

*ננתח את :*

*עבור ולכל יתקיים:*

***לכן ונמקם את להיות ה-13 בסדרה.***

*ננתח את :*

*נסמן . עבור ולכל מתקיים:*

***לכן . נמקם את להיות ה-14 בסדרה.***

*נמשיך לנתח את ביחס לפונקציה האחרונה שנותרה, :*

*עבור ולכל מתקיים:*

*כי הרי עבור מתקיים:*

***כלומר הוכחנו ש- ולכן היא ה-15 בסדרה.***

***קיבלנו בסה"כ:***

***שאלה 3***

1. *בסיס: עבור ועבור מתקיים:*

*ועבור מתקיים:*

*כלומר עבור הטענה מתקיימת: .*

*הנחה: עבור , אם אי-זוגי, נניח שהטענה נכונה עבור , ואם זוגי, נניח שהטענה נכונה עבור*

*, כלומר בשני המקרים נניח:*

*צעד: נוכיח שהטענה נכונה עבור :*

*אם אי זוגי אז:*

*אם זוגי אז:*

בזאת הוכחנו שעבור ולכל מתקיים:

מ.ש.ל.

1. נשתמש בעץ רקורסיה:

נסכום את כל השורות. נתייחס לסכום כאילו הוא נעצר ב-, כלומר נתבונן בחסם התחתון של ונתעלם מהחלק השמאלי בעץ שנותר ושאינו נעצר לאחר איטרציות:

כדי ש- יהיה מסדר גודל שמשמעותי יותר מ-, נצטרך שהסכום האחרון לא יתכנס באינסוף. כלומר עבור מתקיים:

כי זוהי סדרה הנדסית עם . לכן:

*לעומת זאת, עבור :*

*כעת הסכום עבור החסם מלמעלה כמעט זהה, רק שהפעם נבצע הרחבה לחלק הימני בעץ ונסכום איטרציות:*

*עבור יתקיים ש- ולכן:*

*ולכן אפילו אם נרחיב את העץ שמתאר את ונבחר עדיין לא יתקיים כי ראינו שהגבול אינו יכול להתאפס.*

ולכן הוא המינימלי עבורו . מ.ש.ל.

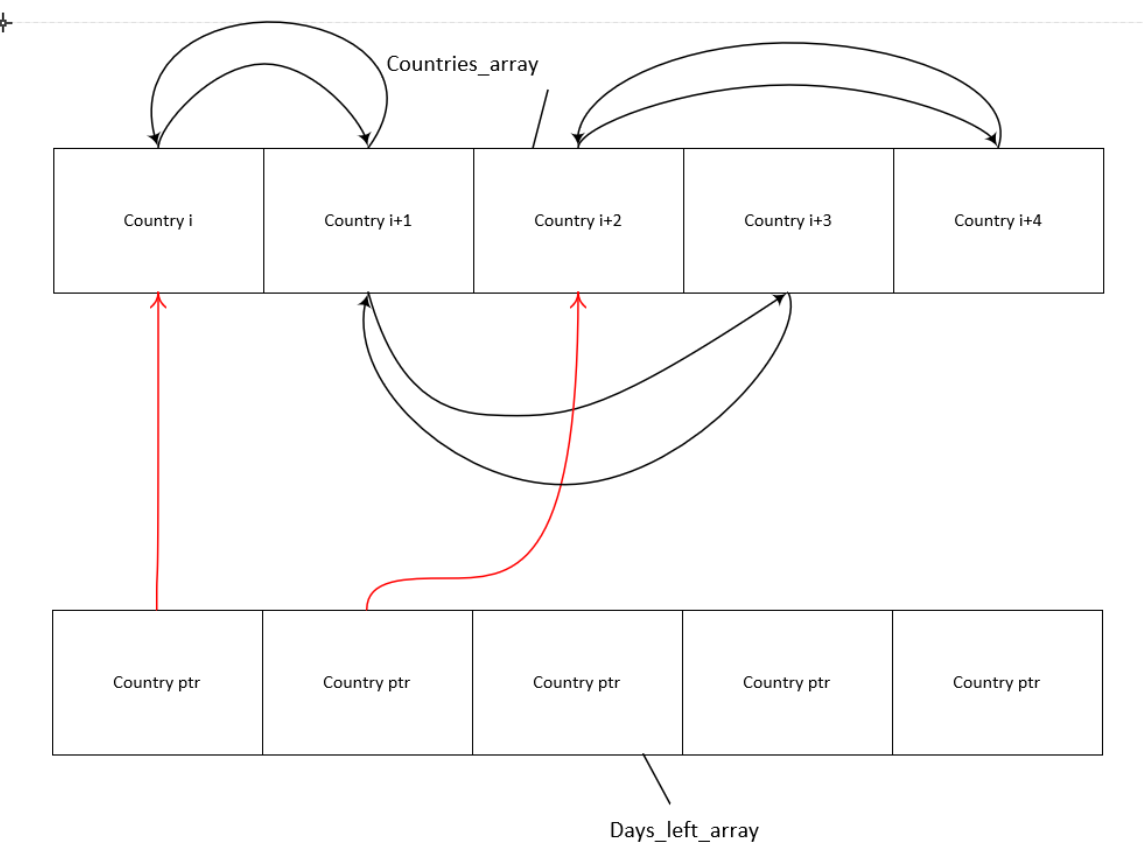
1. ננתח את נוסחאות הנסיגה:

* :

**שאלה 4**

מבנה הנתונים כולל:

* + struct בשם שהוא node של רשימה מקושרת דו כיוונית: תא המכיל משתנה ששמו , ו2 תאים לכתובת הבאה והקודמת של country. מבנה זה מכיל 3 משתנים בסה"כ.
  + מערך באורך המכיל איברים מסוג country (הגודל הוא כדי שהמדינה ה- תהיה באינדקס ה-, כלומר האינדקס 0 לא משמש אותנו כאן). המשמעות של מערך זה היא שהוא שומר את כל המדינות שהוכנסו כבר למערכת.
  + משתנה ששומר כמה ימים עברו מהיום שבוצע מודולו . כלומר .
  + מערך באורך המכיל מצביעים לאיברים מסוג country. המשמעות של מערך זה היא שהוא שומר במקום ה- מצביע לאיבר הראשון ברשימה המקושרת של כל המדינות שנותרו ימים לבחירות שלהן.
  + 2 מערכים ו- שכל אחד מהם מאורך , ומשתנה , אשר שנועדו לאפשר תמיכה ב- בסיבוכיות זמן של .
  + 2 מערכים ו- שכל אחד מהם מאורך , ומשתנה , אשר נועדו לאפשר תמיכה ב- בסיבוכיות זמן של
  + מערך באורך (שימוש במערך זה יודגם בהמשך).



הסבר על סיבוכיות המקום:

יש לנו 4 מערכים באורך כאשר באחד מהם (מערך ) יש לכל היותר איברים בגלל שהוא מכיל איברים מסוג country. בנוסף, יש לנו 3 מערכים באורך , ועוד 3 משתני עזר. סה"כ יש לכל היותר

משתנים בסה"כ, ולכן סיבוכיות המקום היא .

* : נבצע את האלגוריתם של init ב- O(1) שלמדנו בכיתה ונאתחל את , . המערך מסונכרן עם . כלומר באינקס ב- יש ערך חוקי אם"ם יש ערך חוקי באינקס ב-. נאפס את משתני ה- כדי לתמוך ב-. בנוסף נאתחל את ל-0.

סיבוכיות הזמן היא בהנחה שסיבוכיות הזמן של הקצאת זיכרון היא .

* : נוסיף את המדינה למערך (נעדכן בתוך המשתנה החדש שייצרנו) ואז נוסיף את מדינה זו להתחלה של הרשימה המקושרת שכתובת תחילתה נמצאת באינדקס

במערך . נבצע השמה

. ההסבר להגיון הוא כזה: נניח שהוספנו מספר מדינות כלשהו ביום כלשהו ונותרו 50 ימים לבחירות עבור כל המדינות הללו. בכל יום שעובר נותר יום אחד פחות לבחירות. אם למשל הוספנו את המדינות הללו ביום שאתחלנו בו את מבנה הנתונים, אז הרשימה המקושרת של המדינות הללו תתחיל באינדקס ה-50 במערך . לאחר 5 ימים שחלפו, האינדקס ה-50 כבר אינו מייצג את המדינות שנותרו להם 50 ימים לבחירות, אלא מייצג את המדינות שנותרו להם 45 ימים לבחירות, ולכן המשתנה נוצר ומתעדכן בשביל לאפשר לעקוב אחר הימים שחולפים. כעת לאחר 5 ימים אם נוסיף מדינה חדשה שיש לה 45 ימים לבחירות, אז נצטרך להוסיף אותה לרשימה המקושרת הנמצאת באינדקס ה-50, כי הרי המדינות הנמצאות שם כרגע מייצגות את המדינות שנותרו להם 45 ימים לבחירות. לכן לאחר 5 ימים כאשר נוסיף מדינה חדשה שנותרה לה 45 ימים לבחירות, נצטרך למקם אותה באינדקס במערך . **סיבוכיות הזמן היא O(1) מכיוון שאנו מבצעים מספר קבוע של פעולות של השמה וקריאה מהזכרון, שלא תלוי בגדלי המערכים.**

* : תחילה נוסיף 1 למשתנה כדי לעדכן את העובדה שעבר יום. אם , כלומר אם עברו ימים, נאפס את . נעבור ונדפיס את כל המדינות הנמצאות ברשימה המקושרת שכתובת תחילתה נמצא באינדקס במערך . לאחר הדפסה של כל מדינה, נעביר את המדינה לרשימה המקושרת שכתובת התחלתה נמצא באינדקס , ועבור כל מדינה שהדפסנו נעדכן כדי לזכור באיזה אינדקס של רשימה מקושרת כל מדינה נמצאת. **סיבוכיות הזמן היא O(k) מכיוון שאנחנו עוברים בדיוק על k מדינות – כל המדינות שאנו מדפיסים, ועבור כל אחת ממנה אנו מבצעים מספר קבוע של פעולות (הדפסה, העברה לרשימה מקושרת דו כיוונית אחרת).**
* : נשלוף את . אם

זה אומר שהערך של לא תקין (למשל אם אז זה אומר שנותרו ימים לבחירות, והרי שלא נוכל להקדים אותן ב12 ימים). לכן במקרה זה נחזיר ערך שגיאה. אחרת, נעביר את המדינה לתחילתה של הרשימה המקושרת הנמצאת באינדקס . כלומר, בעצם הקדמנו את יום הבחירות של המדינה ב- ימים. נעדכן גם

. לדוגמא: נניח שהכנסנו את מדינה מספר 1 ביום שביצענו init והגדרנו שנותרו 50 ימים לבחירות של המדינה (כלומר ), ונניח ועברו 5 ימים מאז שהכנסנו את המדינה למערכת. כעת נותרו 45 ימים לבחירות. המדינה כעת ברשימה המקושרת שכתובת התחלתה נמצא באינדקס 50 במערך . נבצע כלומר נרצה להקדים את הבחירות של מדינה מספר 1 ביומיים. כעת נעביר את מדינה מספר 1 לרשימה המקושרת המתחילה באיבר הנמצא באינדקס

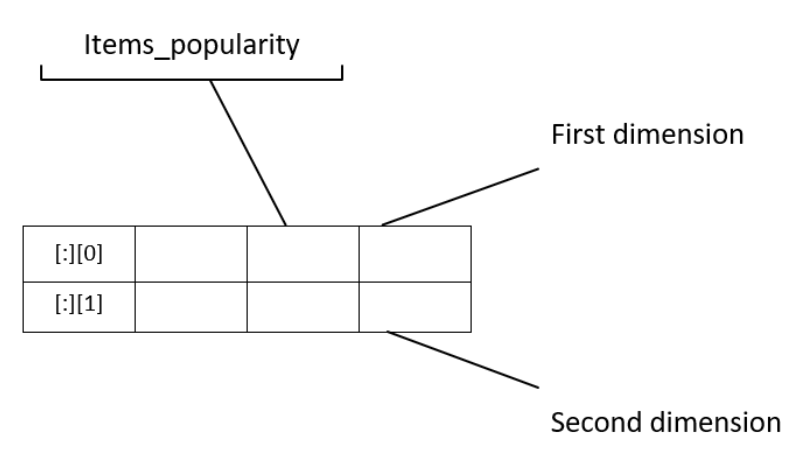
כלומר לרשימה המקושרת הנמצאת באינדקס

. כעת לאחר 48 ימים שיעברו בסה"כ המשתנה יהיה 48 והבחירות במדינה מספר 1 יתקיימו בזמן זה ולא לאחר 50 ימים כפי שהיה אמור להיות בהתחלה. **סיבוכיות הזמן היא מכיוון שבחרנו להשתמש ברשימה מקושרת דו כיוונית, וברשימה מקושרת מסוג זה סיבוכיות הזמן להוציא איבר מהרשימה ולהכניס איבר אל הרשימה היא O(1) כאשר יש לנו את הכתובת של האיבר מראש (ויש לנו את הכתובת כי אנחנו שומרים במערך את כל האיברים הנמצאים בכל הרשימות המקושרות).**

**שאלה 5**

*מבנה הנתונים כולל:*

* + *מערך באורך של מצביעים למערך באורך קבוע של 5 (בסה"כ לכל היותר משתנים). כלומר כל תא במערך מכיל מצביע למערך באורך 5 (שנקרא לו ).*
  + *מערך באורך .*
  + *מערך באורך .*
    - *2 המערכים הללו נועדו לאפשר תמיכה ב- בסיבוכיות זמן של .*
  + *משתנה בשם ששומר מספר.*
  + *משתנה שנועד לאפשר תמיכה ב-.*
  + *משתנה ששומר את כמות הפריטים שנמכרו בחנות ביום מסוים.*
  + *משתנה ששומר את כמות הפריטים שהוחזרו לחנות ביום מסוים.*
  + *מערך דו ממדי בממדים שמשמש כמחסנית בממד הראשון, וכשומר אינדקסים בממד השני. מערך זה שומר באינדקס את כמות המכירות עבור כל פריט שנמכר, ובאינדקס את האינדקס של הפריט שמייצג את כמות המכירות הנמצאת ב-. לדוגמא אם מכרנו 5 פעמים את פריט מספר 1 ולמשל הוא הפריט שנמכר הכי הרבה פעמים, אז באינדקס יהיה 5 (כמות הפעמים שהפריט נמכר), ובאינדקס יהיה 1 (האינדקס של הפריט שנמכר). לאורך התכנית נדאג שמערך זה יישאר כל הזמן ממוין בסדר יורד על פי הממד הראשון (כמות הפעמים שהפריטים נמכרו - באינדקס ה- קיים האיבר הגדול ביותר). מעכשיו והלאה נקרא לממד שמתייחס למערך הממד הראשון, ולממד המתייחס למערך הממד השני.*



* + *מערך של אינדקסים באורך . מערך זה שומר באינדקס את הכתובת של התא במערך כאשר תא זה מייצג את כמות הפעמים שהפריט נמכר.*
  + *מערך באורך .*
  + *מערך באורך .*
    - *2 המערכים הללו נועדו לאפשר תמיכה ב- של בסיבוכיות זמן של .*
  + *משתנה שהוא מצביע של המחסנית בממד הראשון.*

*סיבוכיות המקום היא כי אנו מייצרים מספר קבוע של מערכים מאורך ובנוסף אנו מייצרים מספר קבוע של משתנים שאינם מערכים.*

* *Init(n, c): נאתחל את המערכים למערכים באורך בסיבוכיות זמן בדרך שבה למדנו בכיתה. נאפס את ונבצע השמה . בנוסף נאתחל את באותה השיטה של ב- שלמדנו בכיתה, כאשר הם מערכי העזר. לבסוף נאתחל את .*
* *: אם נחזיר שגיאה. אם אף פעם לא ניגשנו ל- (ואפשר לדעת זאת על ידי השימוש במבנה של אלגוריתם שלמדנו בכיתה) אז נבנה ב- מערך באורך 5 ובכל אחד מתאיו נשים את הערך . ניגש לאיבר שנמצא באינדקס ה- במערך שכתובתו נמצאת ב-, כלומר ניגש ל-. אם אז נחסיר 1 מאיבר זה כדי לציין את העובדה שבוצעה קניה. אחרת, נחזיר הודעה על כך שלא ניתן לקנות את הפריט כי הוא לא נותר במלאי. נבדוק אם מכיל אינדקס חוקי (האם הפריט נמכר בעבר). במידה ולא, זה אומר שזאת הפעם הראשונה שקנו את הפריט , ולכן נשים 1 בראש המחסנית בממד הראשון (כלומר בתא ה- במערך זה), נשמור את האינדקס ב-, ונקדם את ב-1. אחרת, במידה והאינדקס הנמצא ב-כן היה חוקי (ונסמנו ב-), נקדם ב-1 את הערך הנמצא ב- (איבר זה בעצם מתאר כמה מוצרים נקנו מפריט עד כה, ולכן נצטרך לקדם ב-1 את ערך זה). אם זה אומר שזה הפריט הראשון שהכנסנו, ולא נמשיך לבצע דבר. אחרת, נבדוק האם כמות הפריטים מסוג שכעת נקנו (זהו הערך החדש ב-( גדולה יותר מהכמות פריטים שנמכרו הנמצאת ב-). במידה ולא, לא נבצע דבר ונסיים. במידה וכן, נחליף בין ו- ונחליף גם בין ובין (ההחלפה השניה נועדה כדי שנוכל עדיין להמשיך לדעת עבור כל כמות של מכירות לאיזה מוצר היא מתייחסת).* ***סה"כ ברור שסיבוכיות הזמן היא כי ביצענו מספר קבוע של פעולות שלא תלוי בגודל הקלט, לא תלוי בגודל של ולא תלוי בגודל של .***
* *: אם נחזיר שגיאה. אם אף פעם לא ניגשנו ל- (ואפשר לדעת זאת על ידי השימוש במבנה של אלגוריתם שלמדנו בכיתה) אז נבנה ב- מערך באורך 5 ובכל אחד מתאיו נשים את הערך (סיבוכיות הזמן לבנות מערך כזה היא ). ניגש לאיבר שנמצא באינדקס ה- במערך שכתובתו נמצאת ב-, כלומר ניגש ל-, ונוסיף לו 1 כדי לציין את העובדה שהחזרנו פריט (פעולה זו גם מתבצעת ב-). סה"כ ברור שסיבוכיות הזמן היא כי ביצענו מספר קבוע של פעולות שלא תלוי בגודל הקלט, לא תלוי בגודל של ולא תלוי בגודל של .*
* *: נחזיר את הערך של המשתנה . מידי שסיבוכיות הזמן היא .*
* *: נחזיר את הערך של המשתנה . מידי שסיבוכיות הזמן היא .*
* *: נעבור על האיברים בממד הראשון ב- (כלומר אינדקסים עד ועבור כל אחד מהם נדפיס את האיבר הנמצא בממד השני. כלומר עבור האינדקס נדפיס את ... ועבור נדפיס את . ההדפסות הן בעצם של ה- פריטים שנמכרו הכי הרבה. סיבוכיות הזמן היא כי אנחנו עוברים בדיוק על איברים ומבצעים הדפסה.*
* *IsSuccessful(): נבדוק אם . אם כן, נחזיר . אחרת נחזיר . ברור שסיבוכיות הזמן היא כי אנו מבצעים כמות קבועה של פעולות.*